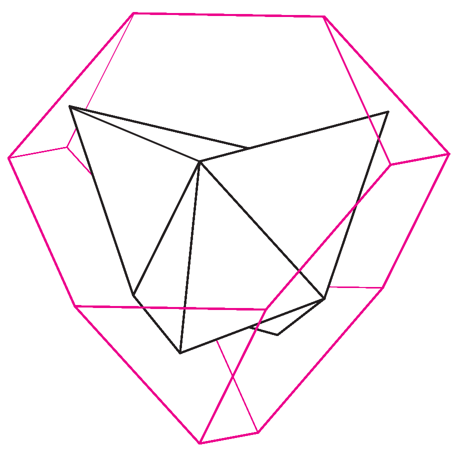
Wielościany Catalana

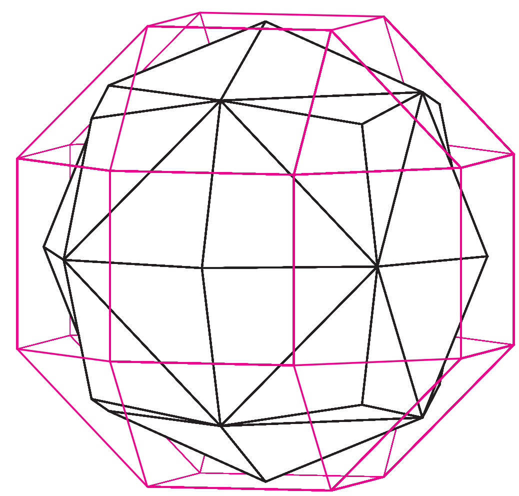
Tadeusz E. DOROZIŃSKI[*], *Zdzisław POGODA*[**]

Wielościany foremne, zwane też platońskimi, to takie, których wszystkie ściany są jednakowymi wielokątami foremnymi i które mają jednakowe naroża. Jak wiadomo, jest ich pięć. Jeśli połączymy środki sąsiednich ścian takiego wielościanu, otrzymamy krawędzie wielościanu dualnego. Operacja ta nie przyniesie nam jednak nic nowego: do czworościanu dualny będzie czworościan, do sześcianu ośmiościan (i nawzajem), a do dwunastościanu dwudziestościan (i też nawzajem). Zatem wielościany foremne (nie zawsze różne) łączą się za jej pomocą w pary. Mówiąc inaczej: dwukrotne wykonanie tej operacji prowadzi do wielościanu takiego samego jak wyjściowy, choć innej wielkości.

Przedłużenie tej operacji nawet na tak porządne wielościany, jak wielościany półforemne (zwane również archimedesowymi), nie może odbyć się mechanicznie. Wielościany półforemne też mają ściany foremne, ale niejednakowe, a ich naroża nadal są jednakowe, co oznacza, że składające się na nie wielokąty ułożone są w takim samym cyklicznym porządku. Jest ich 13 oraz dwie nieskończone serie: to dwa n-kąty połączone paskiem kwadratów (graniastosłupy) lub paskiem trójkątów równobocznych (antygraniastosłupy). Wykonując opisaną wyżej operację dla niektórych z takich wielościanów, np. dla wielościanu noszącego nazwę czworościanu ściętego (rys. 1), w którego wierzchołkach zbiega się trójkąt z dwoma sześciokątami, otrzymamy wielościan nie tylko niepółforemny, ale nawet niewypukły. Podobnie jest dla sześcio-ośmiościanu rombowego małego (rys. 2), w którego w wierzchołku schodzą się trzy kwadraty i trójkąt.



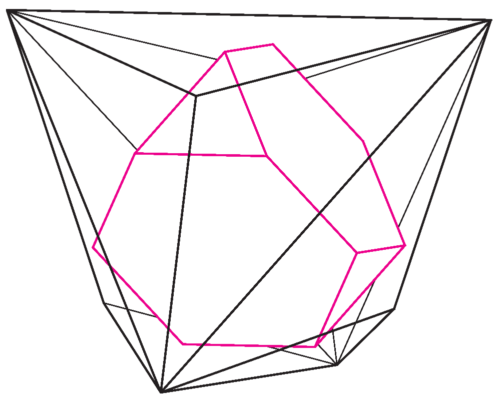
Rys. 1. Czworościan ścięty i wielościan wyznaczony przez środki jego ścian.



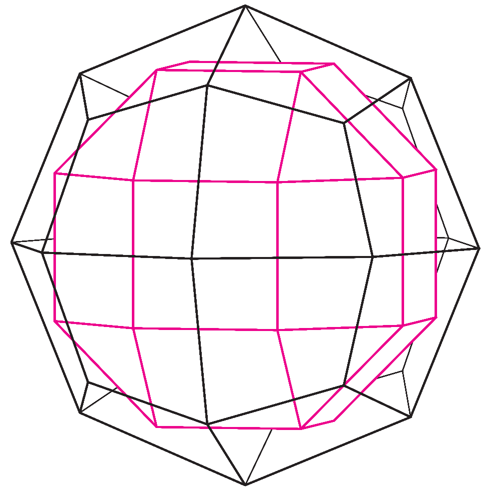
Rys. 2. Sześcio-ośmiościan rombowy mały i wielościan wyznaczony przez środki jego ścian.

Jak uratować sytuację i wymyślić coś, co byłoby przedłużeniem dualności, a dotyczyłoby i wielościanów półforemnych? Jest pewien szczęśliwy zbieg okoliczności, który to umożliwia: na każdym wielościanie półforemnym można opisać sferę – nie jest to całkiem banalne, ale nie wątpimy, że Czytelnicy potrafią to uzasadnić. No to ją opiszmy i w każdym wierzchołku wielościanu poprowadźmy płaszczyznę styczną do tej sfery. Płaszczyzny te wytną wypukły wielościan, który będziemy uważali (za Eugenem Charlesem Catalanem) za dualny do wyjściowego. Rysunki 3 i 4 przedstawiają właśnie tak wykonane wielościany dualne do wielościanów z poprzednich rysunków. Jak widać, wielościany dualne nie są już półforemne, choć, oczywiście, są wypukłe, a nawet mają ściany przystające – choć nie są one wielokątami foremnymi.

[*]Düsseldorf
[**]Instytut Matematyki, Uniwersytet Jagielloński

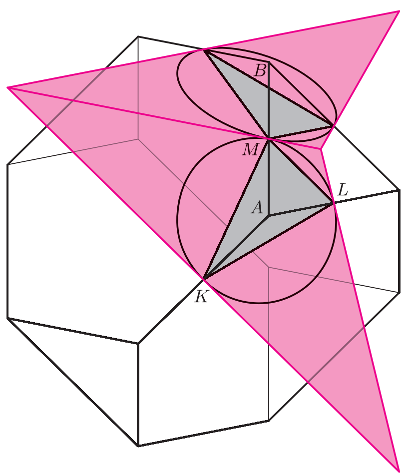


Rys. 3. Wielościan dualny do czworościanu ściętego według Catalana.

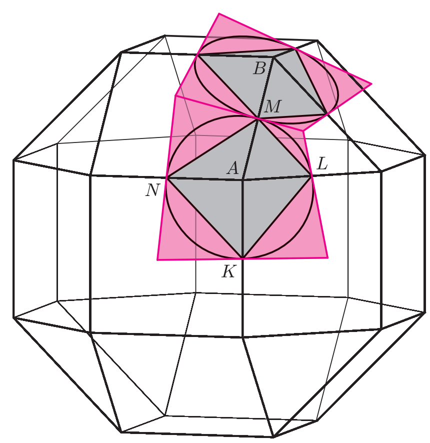


Rys. 4. Wielościan dualny do sześcio-ośmiościanu rombowego małego według Catalana.

Ale jest też inna metoda dająca te same wyniki. Otóż, istnieje jeszcze jedna sfera związana z wielościanami półforemnymi, mianowicie przechodząca przez środki wszystkich krawędzi takiego wielościanu. Nazywana jest ona sferą pośrednią. Środki krawędzi wychodzących z jednego wierzchołka leżą na jednej płaszczyźnie (co nie jest takie trudne do uzasadnienia) – jej przecięcie ze sferą pośrednią to oczywiście okrąg. Rysując w środkach krawędzi styczne do niego, otrzymujemy wielokąty, które formują wielościan podobny do uzyskanego poprzednią metodą. Ten sposób pochodzi – według Cundy'ego i Rolleta (autorów książki *Modele matematyczne*) – od Dormana Luke'a. Opisaną metodę uzyskiwania wielościanu dualnego ilustrują rysunki 5 i 6.



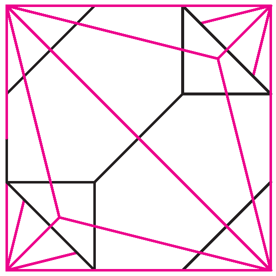
Rys. 5. Konstrukcja wielościanu dualnego wg Luke'a dla czworościanu ściętego. . .



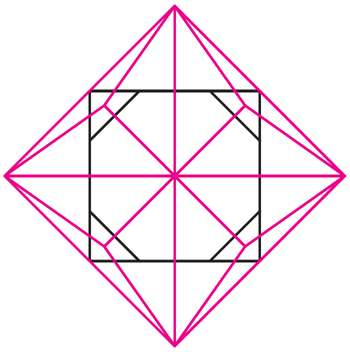
Rys. 6. . . . i dla sześcio-ośmiościanu rombowego małego.

Wszystkie wielościany dualne do wielościanów półforemnych nazywamy wielościanami Catalana. Dlaczego jednak nazywamy je także dualnymi? Otóż okazuje się, że (rozsądne) powtórzenie tej operacji na wielościanach Catalana daje nam. . . wielościany półforemne. Dzieje się tak dlatego, że stosowana przez nas, w obu przypadkach, operacja to dualność względem sfery. Operacja ta przy danej sferze przypisuje punktowi leżącemu na zewnątrz sfery (*biegunowi*) płaszczyznę (*biegunową*) zawierającą punkty styczności stycznych do sfery poprowadzonych z tego punktu, a dla pozostałych punktów określa się ją, przyjmując zasadę, że jeśli punkt A leży na biegunowej punktu B, to biegunowa punktu A przechodzi przez punkt B. Czytelnik może sprawdzić, że określa to tę operację dla wszystkich punktów – dodajmy jeszcze, że biegunowa punktu sfery to płaszczyzna styczna w tym punkcie. Nietrudno sprawdzić, że dualność względem każdej z rozpatrywanych sfer zamienia wielościan półforemny na jego wielościan Catalana i odwrotnie. A zatem dwukrotnie wykonana daje wielościan taki, jak wyjściowy.

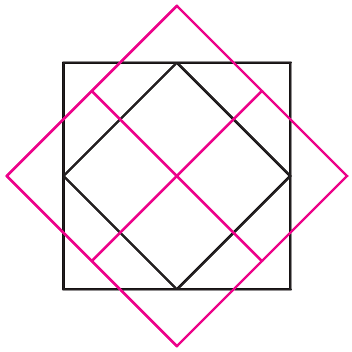
Rozwiązanie zadania F 753.
Prąd płynie w ciągu połowy czasu przez jedną diodę, wydzielając moc $P_1 = U^2/R_1$, a w ciągu drugiej połowy czasu przez drugą diodę, wydzielając moc $P_2 = U^2/R_2$. Zatem średnia moc wydzielana w obwodzie wynosi
$$P = \frac{P_1 + P_2}{2} = U^2 \frac{R_1 + R_2}{2R_1 R_2}.$$



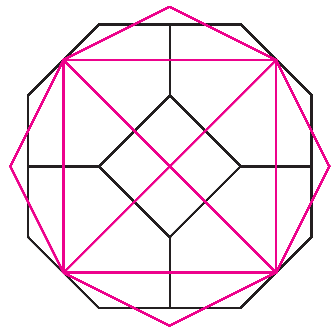
czworościan ścięty
czworościan potrójny



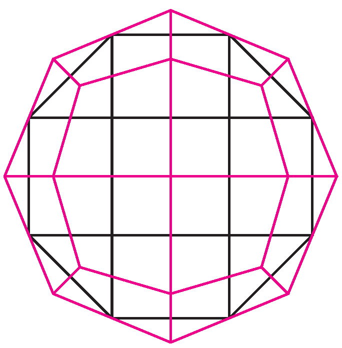
sześcian ścięty
ośmiościan potrójny



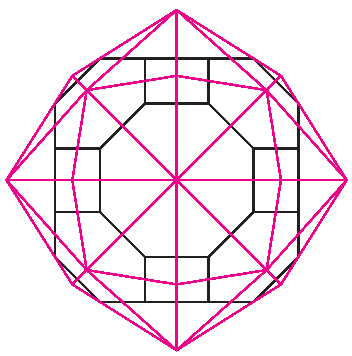
sześcio-ośmiościan
dwunastościan rombowy



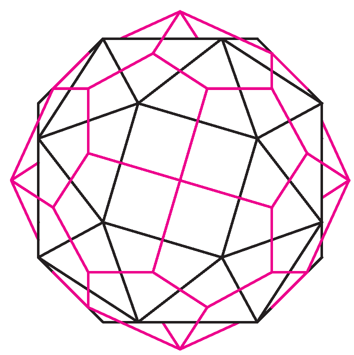
ośmiościan ścięty
sześciościan poczwórny



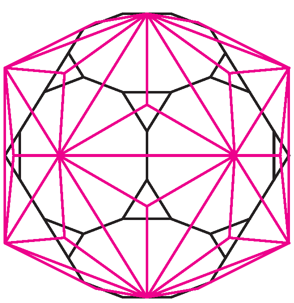
sześcio-ośmiościan rombowy mały
dwudziestoczterościan rombowy



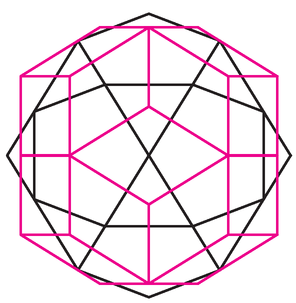
sześcio-ośmiościan rombowy wielki
ośmiościan szóstkowy



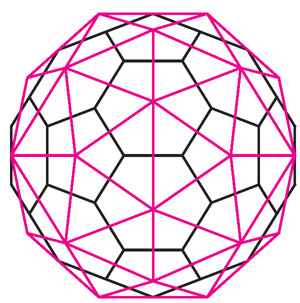
sześcian przycięty
dwudziestoczterościan pięciokątny



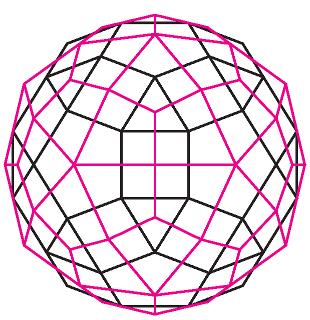
dwunastościan ścięty
dwudziestościan potrójny



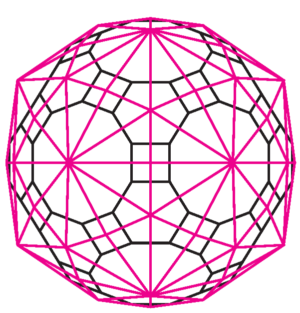
dwudziesto-dwunastościan ścięty
trzydziestościan rombowy



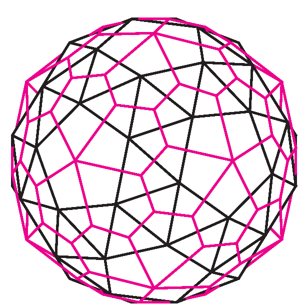
dwudziestościan ścięty
dwunastościan piątkowy



dwudziesto-dwunastościan rombowy mały
sześćdziestościan deltoidowy



dwudziesto-dwunastościan rombowy wielki
dwudziestościan szóstkowy



dwunastościan przycięty
sześćdziestościan pięciokątny

Rys. 7. Wielościany archimedesowe z dualnymi do nich wielościanami Catalana.