

Dla liczb dodatnich $a \geq b$ zachodzi następująca nierówność:

$$a \geq \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \geq \frac{a + b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \geq b,$$

przy czym każda z równości ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy $a = b$.

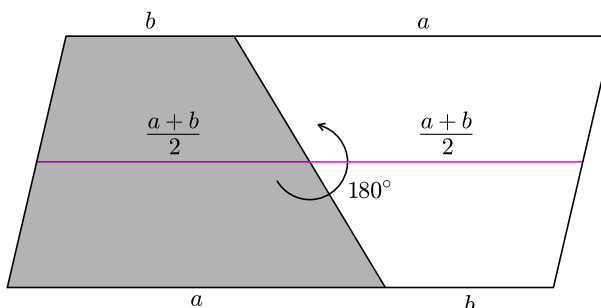
Cztery występujące tu średnie pomiędzy liczbami a i b to odpowiednio średnia kwadratowa, arytmetyczna, geometryczna i harmoniczna.

Czy da się te cztery średnie „znaleźć” w trapezie o podstawach a i b ? Okazuje się, że tak! Są one długościami odpowiednio dobranych odcinków *poziomych*, czyli przekrojów trapezu, równoległych do jego podstaw. Co więcej, nietrudno udowodnić powyższą nierówność, korzystając z własności tych odcinków.

Na początek wskaźmy w trapezie wszystkie cztery średnie, dowód nierówności pozostawiając na później.

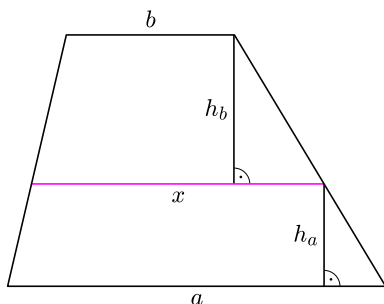
Średnia arytmetyczna (A). Chyba najłatwiejsza do znalezienia i najbardziej znana — wystarczy wziąć *środkową* trapezu, czyli odcinek łączący środki jego ramion.

Z twierdzenia Talesa odcinek ten jest równoległy do podstaw. Aby przekonać się, że rzeczywiście jest on długości $\frac{a+b}{2}$, obróćmy trapez o 180° względem środka ramienia (rysunek 1).



Rys. 1

Figura otrzymana jako suma trapezów (wyściowego i nowego) jest równoległobokiem o długości podstawy $a + b$, więc takiej też długości jest odcinek zbudowany z dwóch środkowych. Stąd każda z nich jest długości $\frac{a+b}{2}$.



Rys. 2

Średnia kwadratowa (K). Podzielmy trapez odcinkiem równoległym do podstaw na dwa trapezy o równych polach. Przesuwając poziomy odcinek od jednej podstawy do drugiej, nietrudno się przekonać, że jest dokładnie jedno jego „dobre” położenie.

Jaka jest wtedy długość tego odcinka? Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku 2, ponadto niech S będzie polem trapezu.

Wtedy

$$\frac{S}{2} = \frac{a+x}{2} \cdot h_a \quad \text{i} \quad \frac{S}{2} = \frac{b+x}{2} \cdot h_b,$$

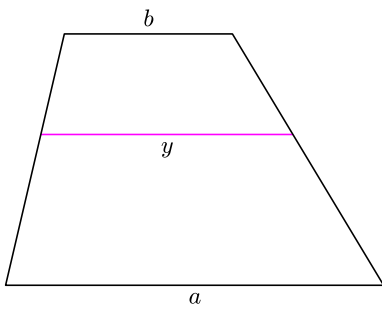
stąd

$$\begin{aligned} S &= \frac{a+b}{2} \cdot (h_a + h_b) = \frac{a+b}{2} \cdot \left(\frac{S}{a+x} + \frac{S}{b+x} \right) = \\ &= \frac{S(a+b)}{2} \cdot \frac{b+x+a+x}{(a+x)(b+x)} = S \cdot \frac{(a+b)^2 + 2x(a+b)}{2ab + 2x^2 + 2x(a+b)}. \end{aligned}$$

Wobec tego $2ab + 2x^2 = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, więc

$$x = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}.$$

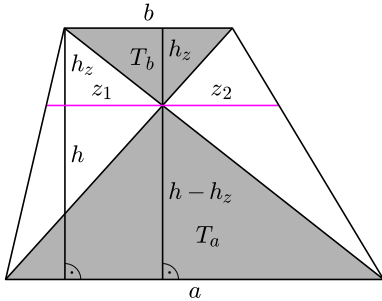
* Instytut Matematyczny PAN



Rys. 3

Średnia geometryczna (G). Podzielmy ponownie nasz trapez odcinkiem poziomym, ale tym razem inaczej — tak, by otrzymane trapezy były podobne (rysunek 3).

Znów nasuwa się pytanie, czy w ogóle można to zrobić i jeśli tak, to czy tylko na jeden sposób. Dla $a = b$ trapez jest równoległobokiem, a szukany odcinek to jego środkowa. Dla $a > b$ podzielmy trapez poziomym odcinkiem o długości y . Zauważmy, że otrzymane trapezy mają odpowiednie kąty równe, więc aby były podobne, potrzeba i wystarcza, by miały równe stosunki długości odpowiednich podstaw: $\frac{a}{y} = \frac{y}{b}$, czyli by $y = \sqrt{ab}$. Jest to liczba z przedziału (b, a) , więc taki przekrój trapezu istnieje i to dokładnie jeden.



Rys. 4

Średnia harmoniczna (H). Jaka jest długość z odcinka równoległego do podstaw trapezu i przechodzącego przed punkt przecięcia jego przekątnych? Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku 4.

Z podobieństwa trójkątów o odpowiednich podstawach i wysokościach otrzymujemy

$$\frac{a}{z_1} = \frac{h}{h_z}$$

i analogicznie dla z_2 , co dowodzi, że $z_1 = z_2$. Korzystając z powyższej proporcji i z podobieństwa trójkątów T_a i T_b , uzyskujemy

$$\frac{a}{z_1} = \frac{h}{h_z} = \frac{h - h_z}{h_z} + 1 = \frac{a}{b} + 1 = \frac{a + b}{b},$$

więc

$$z = z_1 + z_2 = 2z_1 = 2 \cdot \frac{ab}{a + b} = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}.$$

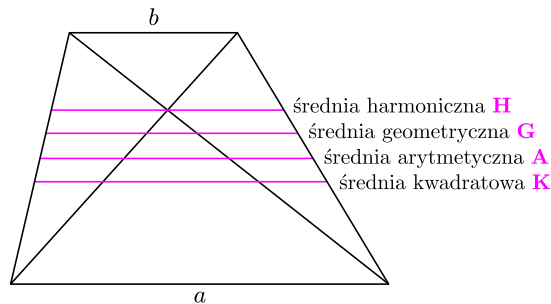
Znaleźliśmy zatem w trapezie wszystkie cztery średnie i wiemy, że odpowiadające im odcinki leżą pomiędzy podstawami. Ale czy leżą one we właściwej kolejności, czyli czy rzeczywiście zawsze zachodzi podana na początku nierówność? Dla $a = b$ trapez jest równoległobokiem, wszystkie cztery odcinki pokrywają się i wszystkie cztery średnie są równe. A co się dzieje dla $a > b$?

K > A: Zauważmy, że dolny z trapezów o równych polach ma odpowiednie podstawy dłuższe niż górny, zatem musi mieć mniejszą wysokość. Stąd wyznaczający te trapezy odcinek leży poniżej środkowej.

A > G: Tu z kolei dolny z dwóch trapezów podobnych też ma odpowiednie podstawy dłuższe, ale tym razem oznacza to, że i wysokość musi mieć dłuższą. Stąd wyznaczający te trapezy odcinek leży powyżej środkowej.

G > H: Dla trapezów podobnych stosunek wysokości górnego do dolnego jest równy stosunkowi długości odpowiednich podstaw, czyli jest większy niż $\frac{b}{a}$. Wobec tego odcinek wyznaczający te trapezy leży poniżej przekroju dzielącego wysokość całego trapezu w stosunku $b : a$ (licząc od góry), czyli poniżej poziomego odcinka przechodzącego przez punkt przecięcia przekątnych.

To kończy dowód naszej nierówności. Może ktoś z Czytelników zna inne poziome przekroje trapezu o ciekawych własnościach? A może nierówność średnich dla trzech liczb też da się jakoś ładnie zilustrować, na przykład w przestrzeni trójwymiarowej?



Rys. 5