Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html.

Redaguje Marcin E. KUCZMA

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
511 ($WT = 2{,}63$) i **512** ($WT = 1{,}80$)
z numeru 12/2005

Janusz Olszewski	– Suwałki	47,39
Tomasz Rawlik	– Braunschweig	45,46
Marian Łupieżowiec	– Zebrzydowice	42,55
Adam Dzedzej	– Gdańsk	42,30
Michał Kieza	– Warszawa	35,43
Michał Jastrzębski	– Warszawa	32,79

I znów dwa bardzo dobrze znane nazwiska – dwie niebagatelne powtórki wterańskie: Janusz Olszewski – po raz ósmy (!!), Tomasz Rawlik – po raz szósty (!).

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
412 ($WT = 2{,}75$) i **413** ($WT = 1{,}70$)
z numeru 2/2006

Mateusz Łącki	– Kraków	40,63
Andrzej Idzik	– Bolesławiec	36,79
Konrad Kapcia	– Częstochowa	30,66
Tomasz Tkocz	– Rybnik	26,26
Jerzy Witkowski	– Radlin	14,12
Andrzej Nowogrodzki	– Chocianów	11,80

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 4/2006

Przypominamy treść zadań:

519. Czy istnieje nieskończony ciąg liczb dodatnich $a_1, a_2, a_3, \ldots$, dla którego szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^2}$ oraz $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{a_n^2}$ są oba zbieżne?

520. Na płaszczyźnie dane są dwa okręgi Ω_1 i Ω_2, o różnych promieniach i środkach (odpowiednio) O_1 i O_2, przecinające się w punktach A i B tak, że kąt O_1AO_2 jest prosty. Na odcinku AB obieramy dowolny punkt X różny od A, B oraz środka odcinka AB. Prosta O_1X przecina okrąg Ω_2 w punktach P_1 i Q_1, prosta O_2X przecina okrąg Ω_1 w punktach P_2 i Q_2, przy czym punkty P_1 i P_2 leżą na odcinkach O_1X i O_2X. Wykazać, że proste P_1P_2, Q_1Q_2 i O_1O_2 mają punkt wspólny i że ten punkt nie zależy od wyboru punktu X.

519. Odpowiedź przecząca wynika natychmiast z nierówności między średnimi ważonymi:

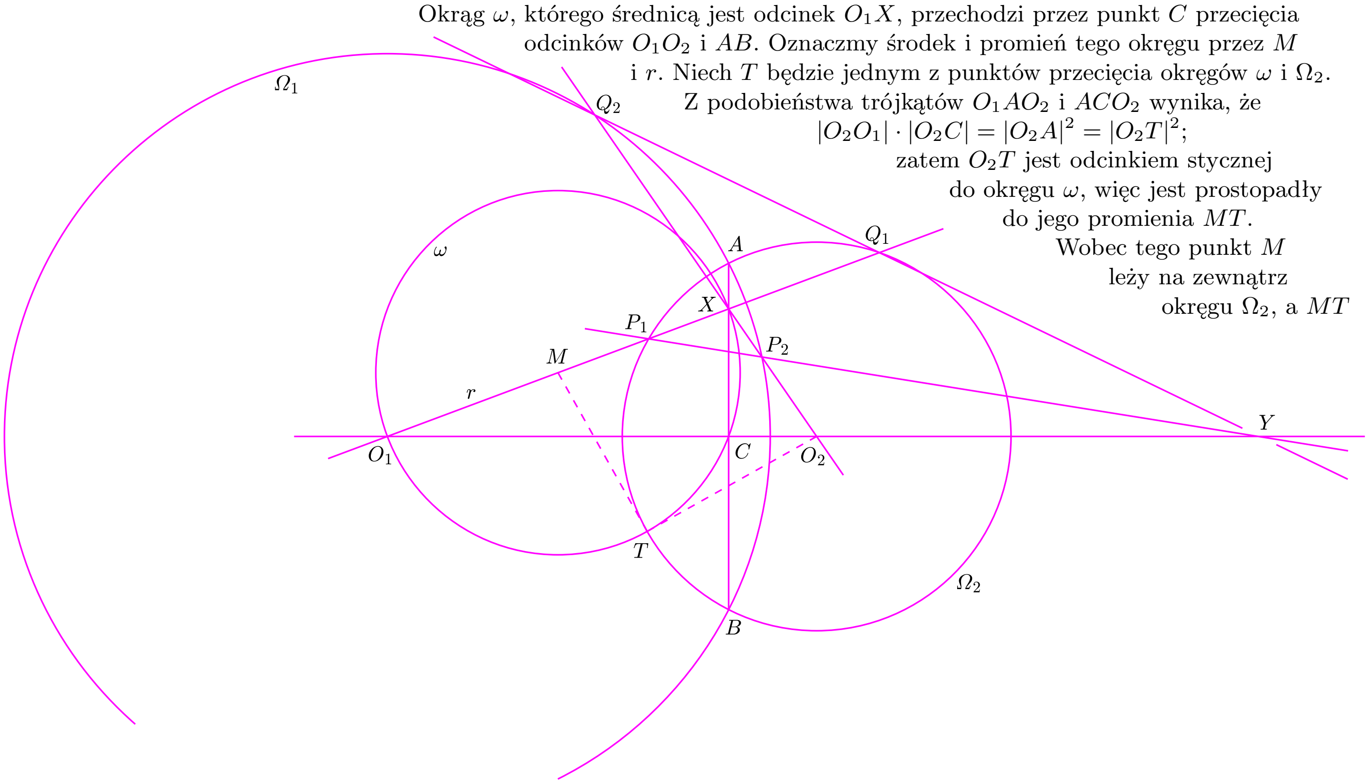
$$\frac{2}{3}\cdot\frac{a_n}{n^2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{n}{a_n^2} \geqslant \left(\frac{a_n}{n^2}\right)^{2/3}\left(\frac{n}{a_n^2}\right)^{1/3} = \frac{1}{n}.$$

Jednoczesna zbieżność obu zadanych szeregów pociągałaby zbieżność szeregu $\sum 1/n$.

520. Rozpoczniemy od wykazania, że

$$\frac{|XP_1|}{|O_1P_1|} = \frac{|XQ_1|}{|O_1Q_1|} \quad \text{oraz} \quad \frac{|XP_2|}{|O_2P_2|} = \frac{|XQ_2|}{|O_2Q_2|}. \tag{1}$$

Okrąg ω, którego średnicą jest odcinek O_1X, przechodzi przez punkt C przecięcia odcinków O_1O_2 i AB. Oznaczmy środek i promień tego okręgu przez M i r. Niech T będzie jednym z punktów przecięcia okręgów ω i Ω_2. Z podobieństwa trójkątów O_1AO_2 i ACO_2 wynika, że $|O_2O_1|\cdot|O_2C| = |O_2A|^2 = |O_2T|^2$; zatem O_2T jest odcinkiem stycznej do okręgu ω, więc jest prostopadły do jego promienia MT. Wobec tego punkt M leży na zewnątrz okręgu Ω_2, a MT



jest odcinkiem stycznej do okręgu Ω_2; dostajemy równość $|MP_1|\cdot|MQ_1| = r^2$. Stąd

$$|O_1Q_1|\cdot|XP_1| = \big(r+|MQ_1|\big)\big(r-|MP_1|\big) = \\ = r\cdot\big(|MQ_1|-|MP_1|\big),$$

$$|O_1P_1|\cdot|XQ_1| = \big(|MP_1|+r\big)\big(|MQ_1|-r\big) = \\ = r\cdot\big(|MQ_1|-|MP_1|\big);$$

przyrównanie lewych stron daje pierwszą równość (1). Druga wynika z niej przez symetrię, bowiem rozumowanie nie zależało od tego, który z okręgów Ω_1, Ω_2 jest większy.

[Związki (1), w „mądrym języku", orzekają, że punkty P_1, Q_1, O_1, X oraz P_2, Q_2, O_2, X tworzą czwórki harmoniczne – co można krócej uzasadnić, zauważając, że prosta AB jest jednocześnie biegunową punktu O_1 względem okręgu Ω_2 oraz biegunową O_2 względem okręgu Ω_1.]

Okręgi Ω_1 i Ω_2 nie są przystające, więc proste P_1P_2 i Q_1Q_2 przecinają prostą O_1O_2 w punktach, które oznaczymy odpowiednio przez Y i Z. Stosując do tych prostych oraz trójkąta O_1O_2X twierdzenie Menelausa, otrzymujemy równości

$$(2)\quad \frac{|O_1Y|}{|O_2Y|} = \frac{|O_1P_1|}{|XP_1|}\cdot\frac{|XP_2|}{|O_2P_2|} \text{ oraz } \frac{|O_1Z|}{|O_2Z|} = \frac{|O_1Q_1|}{|XQ_1|}\cdot\frac{|XQ_2|}{|O_2Q_2|}\,.$$

Ich prawe strony są równe, wobec związków (1). Ponieważ punkty Y i Z leżą na prostej O_1O_2 poza odcinkiem O_1O_2, równość lewych stron wzorów (2) oznacza, że $Y = Z$; tak więc Y jest wspólnym punktem prostych P_1P_2, Q_1Q_2 i O_1O_2. Mnożymy równości (2) stronami:

$$\left(\frac{|O_1Y|}{|O_2Y|}\right)^2 = \alpha\cdot\beta,$$

gdzie $\alpha = \dfrac{|O_1P_1|\cdot|O_1Q_1|}{|O_2P_2|\cdot|O_2Q_2|}$, $\beta = \dfrac{|XP_2|\cdot|XQ_2|}{|XP_1|\cdot|XQ_1|}\,.$

Wartość α nie zależy od X; zaś w wyrażeniu β licznik i mianownik to potęgi punktu X względem okręgów Ω_2 i Ω_1. Dla punktu X leżącego na prostej AB potęgi te są równe. To pokazuje, że wartość stosunku $|O_1Y| : |O_2Y|$, a więc i położenie punktu Y na prostej O_1O_2, nie zależy od wyboru punktu X. (Nietrudno wykazać, że Y jest środkiem jednokładności okręgów Ω_2 i Ω_1.)

[Tezę zadania można też uzyskać rachunkiem na współrzędnych, umieszczając początek układu w punkcie C i przyjmując $A = (0,1)$ oraz (wobec prostopadłości $AO_1 \perp AO_2$): $O_2 = (k,0)$, $O_1 = (-1/k,0)$. Niech $X = (0,w)$; współrzędne punktów P_i, Q_i, Y, Z dają się bez większych problemów obliczyć; wychodzi $Y = Z = ((k{+}1)/(1{-}k),0)$, niezależnie od w.]