Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań:
31 VIII 2008

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
547 ($WT = 1{,}04$) i **548** ($WT = 2{,}24$)
z numeru 10/2007

Marian Łupieżowiec	– Zebrzydowice	43,55
Paweł Kubit	– Kraków	41,03
Grzegorz Karpowicz	– Wrocław	39,78
Krzysztof Dorobisz	– Kraków	39,72
Jerzy Cisło	– Wrocław	37,73
Tomasz Tkocz	– Rybnik	36,35

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html.

Zadania z matematyki nr 563, 564

Redaguje Marcin E. KUCZMA

563. Liczby całkowite k, m, n spełniają równanie $\dfrac{m}{n} = \dfrac{k^2+m^2}{k^2+n^2}$ oraz warunek: $k^2+m^2+n^2$ jest liczbą pierwszą. Dowieść, że $m = n$.

564. W prostokącie o bokach długości a, b poprowadzono skończoną liczbę odcinków równoległych do jego boków. Odcinki mogą się przecinać, żaden nie zawiera się w boku prostokąta, a suma ich długości jest równa d. Udowodnić, że wśród części, na które odcinki dzielą prostokąt, istnieje taka, której pole jest nie mniejsze niż
$$\left(\frac{2ab}{a+b+d}\right)^2.$$

Zadanie 564 zaproponował pan Tomasz K. Kujawa z Wrocławia.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 2/2008

Przypominamy treść zadań:

555. Niech n będzie liczbą parzystą. Wyznaczyć najmniejszą liczbę naturalną k o tej własności, że w każdym k-elementowym podzbiorze zbioru $\{1,2,3,\ldots,3n\}$ znajdują się liczby x, y (niekoniecznie różne), których suma albo różnica jest równa n.

556. Dana jest liczba rzeczywista $a > 0$ oraz liczba całkowita $n > 0$. Udowodnić, że największa możliwa wartość iloczynu $x_1x_2\ldots x_n$, którego czynniki x_i są liczbami naturalnymi spełniającymi warunek $x_1 + \ldots + x_n \leqslant a$, wynosi $\left\lfloor \frac{a}{n} \right\rfloor \cdot \left\lfloor \frac{a+1}{n} \right\rfloor \cdot \ldots \cdot \left\lfloor \frac{a+n-1}{n} \right\rfloor$.

555. Niech $n = 2m$. Wykażemy, że jeśli K jest k-elementowym podzbiorem zbioru $\{1,\ldots,3n\}$, przy czym $k \geqslant 3m+1$, to istnieją takie liczby $x, y \in K$, że $x+y=n$ lub $x-y=n$.

Wystarczy w tym celu wziąć pod uwagę $m-1$ par
$$\{1, 2m{-}1\},\ \{2, 2m{-}2\},\ \ldots,\ \{m{-}1, m{+}1\}$$
oraz $2m$ par
$$\{2m{+}1, 4m{+}1\},\ \{2m{+}2, 4m{+}2\},\ \ldots,\ \{4m, 6m\};$$
razem $3m-1$ par. Elementy każdej pary z drugiej serii różnią się o $2m$ (czyli n); zaś w każdej parze z pierwszej serii suma elementów wynosi $2m$. Gdy zbiór K zawiera którąkolwiek z tych par, to mamy tezę.

Przypuśćmy więc, że tak nie jest; wówczas z każdej pary co najwyżej jeden element wchodzi do K. Jeżeli zbiór K liczy więcej niż $3m$ elementów, to muszą w nim być co najmniej dwie liczby, niewystępujące w tych parach. Jedynymi takimi liczbami są: m oraz $2m$; obie muszą znaleźć się w K. Biorąc $x=y=m$, mamy $x+y=n$; zatem i w tym przypadku zbiór K ma własność, o którą chodzi.

Natomiast zbiór k-elementowy, gdzie $k \leqslant 3m$, już tej własności mieć nie musi. Przykład: zbiór
$$K_0 = \{1,2,\ldots,m{-}1\} \cup \{2m\} \cup \{4m{+}1,\ldots,6m\};$$
dla dowolnych $x, y \in K_0$ mamy $x+y \neq 2m$, $x-y \neq 2m$.

Odpowiedź: minimalna liczność zbioru o rozważanej własności jest równa $\frac{3}{2}n+1$.

556. Iloczyn $x_1x_2\ldots x_n$ przyjmuje tylko skończenie wiele wartości, więc istnieje wśród nich wartość maksymalna M. Niech $z_1,\ldots,z_n$ będą liczbami naturalnymi o sumie $\sum z_i \leqslant a$, dla których $z_1z_2\ldots z_n = M$; można przyjąć, że $z_1 \geqslant z_i \geqslant z_n$ dla wszystkich i. Oczywiście $\sum z_i = \lfloor a \rfloor$ (gdyby ta suma była niewiększa od $\lfloor a \rfloor - 1$, to zwiększając z_1 o 1 dostalibyśmy nowy „dobry” ciąg n liczb naturalnych, o iloczynie większym od M).

Ponadto $z_1 - z_n \leqslant 1$ (gdyby ta różnica wynosiła co najmniej 2, wówczas zastępując z_1 przez $z_1 - 1$, a z_n przez $z_n + 1$, dostalibyśmy nowy „dobry” ciąg, o iloczynie większym od M).

Zapiszmy liczbę $\lfloor a \rfloor$ w postaci $qn + r$ (dzielenie z resztą); q, $r \geqslant 0$ całkowite, $r < n$. Z uzyskanych wcześniej warunków wynika, że w ciągu $(z_1,\ldots,z_n)$ jest $n-r$ liczb równych q oraz r liczb równych $q+1$. Zatem $M = z_1z_2\ldots z_n = q^{n-r}(q+1)^r$.

Oznaczając $a - \lfloor a \rfloor = \delta$ $(0 \leqslant \delta < 1)$, otrzymujemy równości
$$\frac{a+k}{n} = \frac{(qn+r+\delta)+k}{n} = q + \frac{r+k+\delta}{n}$$
dla $k = 0,1,\ldots,n{-}1$,
$$\left\lfloor \frac{a+k}{n} \right\rfloor = q + \left\lfloor \frac{r+k+\delta}{n} \right\rfloor = \begin{cases} q+0 & \text{dla } k < n-r, \\ q+1 & \text{dla } k \geqslant n-r, \end{cases}$$
i ostatecznie
$$\prod_{k=0}^{n-1} \left\lfloor \frac{a+k}{n} \right\rfloor = \prod_{k=0}^{n-r-1} \left\lfloor \frac{a+k}{n} \right\rfloor \cdot \prod_{k=n-r}^{n-1} \left\lfloor \frac{a+k}{n} \right\rfloor = q^{n-r}(q+1)^r = M.$$